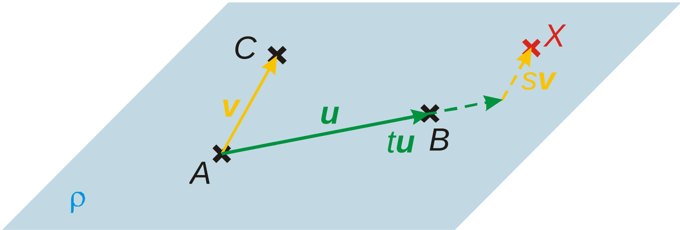
7.4.3 Parametrické vyjádření roviny



Můžeme tedy psát: $X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}$, $t,s \in R$

Př. 1: Rozepiš parametrické vyjádření roviny dané bodem $A[a_1;a_2;a_3]$ a vektory $\boldsymbol{u} = (u_1;u_2;u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1;v_2;v_3)$ do rovnic pro jednotlivé souřadnice bodů $X[x;y;z]$.

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 + sv_1 \\ y &= a_2 + tu_2 + sv_2 \,,\ t,s \in R . \\ z &= a_3 + tu_3 + sv_3 \end{aligned}$$

Př. 2: Najdi parametrické vyjádření roviny ABC $A[1;2;3]$, $B[3;0;2]$, $C[-1;2;-2]$. Výpočtem zjisti, zda v rovině leží body $D[3;2;1]$ a $E[-3;4;-1]$.

Určíme dva směrové vektory: $\boldsymbol{u} = B - A = (2;-2;-1)$ $\boldsymbol{v} = C - A = (-2;0;-5)$

Parametrické vyjádření roviny: $$\begin{aligned} x &= 1 + 2t - 2s \\ y &= 2 - 2t \\ z &= 3 - t - 5s, t \in R, s \in R \end{aligned} .$$

Pokud **bod *D***: $$\begin{aligned} 3 &= 1 + 2t - 2s \\ 2 &= 2 - 2t \\ 1 &= 3 - t - 5s \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vypočítáme t: $2 = 2 - 2t \Rightarrow t = 0$. Dosadíme do zbývajících rovnic:

$3 = 1 + 2 \cdot 0 - 2s \Rightarrow s = -1$

$1 = 3 - 0 - 5s \Rightarrow s = \frac{2}{5}$ $\Rightarrow$ bod D v rovině ABC neleží.

Pokud **bod *E***: $$\begin{aligned} -3 &= 1 + 2t - 2s \\ 4 &= 2 - 2t \\ -1 &= 3 - t - 5s \end{aligned} .$$

Z druhé rovnice vypočítáme t: $4 = 2 - 2t \Rightarrow t = -1$. Dosadíme do zbývajících:

$-3 = 1 + 2 \cdot (-1) - 2s \Rightarrow s = 1$

$-1 = 3 - (-1) - 5s \Rightarrow s = 1$ $\Rightarrow$ bod E v rovině ABC leží.

Př. 3: Jsou dány body $B[3;0;2]$, $C[-1;2;-2]$, $E[-3;4;-1]$ z předchozího příkladu (všechny leží v rovině *ABC*). Najdi parametrické vyjádření přímky *BC*. Poté vyjádři rovinu *ABC* pomocí vyjádření přímky *BC* a bodu *E* (rovinu je možné zadat i přímkou a bodem). Srovnej výsledek tohoto příkladu s parametrickým vyjádřením roviny *ABC* z předchozího příkladu.

Přímka *BC*:

Směrový vektor: $\boldsymbol{u} = C - B = (-4;2;-4)$. Přímka BC: $X = B + t\boldsymbol{u} = [3;0;2] + t(-4;2;-4)$.

Rovina *ABC*: použijeme bod E: $\boldsymbol{v} = E - B = (-6;4;-3)$

Vyjádření roviny: $$\begin{aligned} x &= 3 - 4t - 6s \\ y &= 2t + 4s \\ z &= 2 - 4t - 3s, t \in R, s \in R \end{aligned}$$

Př. 4: Najdi průsečnici roviny $ABC = \{[1+2t-2s;2-2t;3-t-5s], t \in R, s \in R\}$ se souřadnou rovinou *xz*.

Rovnice souřadné roviny *xz*: $y = 0$.
Dosadíme z poslední rovnice do druhé: $0 = 2 - 2t \Rightarrow t = 1$.
Získanou hodnotu dosadíme do zbývajících rovnic: $\begin{aligned} x &= 1 + 2\cdot 1 - 2s = 3 - 2s \\ z &= 3 - 1 - 5s = 2 - 5s \end{aligned}$.
Soustavě rovnic vyhovuje nekonečně mnoho bodů, které vyhovují sadě rovnic:

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2s \\ y &= 0 \\ z &= 2 - 5s, s \in R \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ získali jsme parametrické vyjádření přímky (logické, očekávali jsme to).

Průseční rovin *ABC* a *xz* je přímka $p = \{[3-2s;0;2-5s], s \in R\}$.

Př. 5: Najdi průsečík roviny $ABC = \{[1+2t-2s;2-2t;3-t-5s], t \in R, s \in R\}$ s přímkou $p = \{[-1+2t;-4+t;-2-t], t \in R\}$.

POZOR: vyjádření přímky *p* obsahuje stejně pojmenovaný parametr jako vyjádření roviny $\Rightarrow$ jedno z písmen musíme změnit.

Soustava rovnic: $$\begin{aligned} 1 + 2t - 2s &= -1 + 2r \\ 2 - 2t &= -4 + r \\ 3 - t - 5s &= -2 - r \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vyjádříme r a dosadíme do ostatních: $r = 6 - 2t$.

$$\begin{aligned} 1 + 2t - 2s &= -1 + 2(6 - 2t) \\ 3 - t - 5s &= -2 - (6 - 2t) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1 + 2t - 2s &= -1 + 12 - 4t \\ 3 - t - 5s &= -2 - 6 + 2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3t - s &= 5 \\ 3t + 5s &= 11 \end{aligned}$$

Rovnice odečteme: $-6s = -6 \Rightarrow s = 1$.

t: $3t - s = 3t - 1 = 5 \Rightarrow t = 2$. r: $r = 6 - 2t = 6 - 2\cdot 2 = 2$.

$$\begin{aligned} x &= -1 + 2r = -1 + 2\cdot 2 = 3 \\ y &= -4 + r = -4 + 2 = -2 \\ z &= -2 - r = -2 - 2 = -4 \end{aligned} \Rightarrow P[3;-2;-4].$$

Př. 6: Petáková:
strana 115/cvičení 16 a) d)
strana 115/cvičení 17 a)